随机过程课程说明以及作业

1 课程总评成绩说明

本课程是本硕贯通课程。对于选课的本科生和研究生采用统一的总评计分规则，即

$$\text{总评成绩} = \text{作业成绩} + \text{平时课堂表现} + \text{期末成绩}.$$

各块成绩所占比例由最终全体参加期末考试同学成绩的具体情况而定。总体上，本科生和研究生总评成绩优秀率会控制在 35% 以内。本课程一般不安排期中考试。

2 课程学习参考书

本课程建议选课同学参考如下国外经典教材：

- Ioannis Karatzas, and Steven Shreve (1991): *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York.

I. Karatzas 教授是美国哥伦比亚大学数学系主任, S. Shreve 是美国卡耐基梅隆大学数学系教授同时为该校计算金融硕士项目 (MSCF) 负责人 (2015 年该项目在 QuantNet 排名中位列第一, `https://www.quantnet.com/mfe-programs-rankings`)。他们早期开创了用鞅方法解决不完备市场下最优投资组合问题。

除此之外，建议选课同学参考高等概率论课程的参考书。

3 课程主讲内容

该课程不同于本科的应用随机过程课程，主要讲授如下内容：

- 随机过程的基本概念和理论（包括：随机过程可测性、过滤、随机过程的有限维分布与数字特征、高斯过程、随机过程的等价性以及 Kolmogorov-连续性定理）
- 鞅论（上下鞅基本性质、Doob 上下鞅收敛定理、停时、Doob 可选时定理及其应用、Doob 鞅最大值不等式以及平方可积鞅）
- 布朗运动（布朗运动的存在性、布朗运动相关鞅、布朗运动的反射原理与首中时以及 Girsanov 定理）
- Poisson 过程（Poisson 过程的构造、Poisson 过程相关鞅以及应用）。此部分内容是否讲授取决于前三部分内容讲授的进展情况而定。

4 第一章作业题

1. 设 $X = (X_t;\ t \geq 0)$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 下随机过程。证明：如果该过程的轨道是右连续或左连续的，则该过程是可测的。

2. 用数学软件 (如 Matlab 或 Mathematica) 编程仿真布朗运动的样本轨道。

3. 分别计算布朗运动和 Poisson 过程的一到三维有限维分布。

4. 设 $X = (X_t;\ t \geq 0$ 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 下具有独立增量型的随机过程。证明：对任意 $0 \leq s < t < +\infty$, 增量 $X_t - X_s$ 与 自然 σ-代数 $\mathcal{F}_s^X$ 独立。

5. 设 $X = (X_n;\ n \in \mathbb{N})$ 和 $Y = (Y_n;\ n \in \mathbb{N})$ 是定义在同一概率空间下的互为修正的离散时间随机过程，证明 X 与 Y 是无区别的。

6. 设 $X = (X_t;\ t \geq 0)$ 和 $Y = (Y_t;\ t \geq 0)$ 是定义在同一概率空间下的互为修正的连续时间随机过程且 X 与 Y 轨道为有连续的，证明 X 与 Y 是无区别的。

7. 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(\mu, \Sigma)$, 其中 $\mu = (\mu_X, \mu_Y) \in \mathbb{R}^2$ 以及 $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$, 这里 $\sigma_X, \sigma_Y > 0$ 及 $|\rho| \leq 1$. 证明：

   (a) 设 $U, V \sim N(0,1)$ 且相互独立, 则 $(X, Y) \stackrel{d}{=} (\mu_X + \rho\sigma_X U + \sqrt{1-\rho^2}\sigma_X V, \mu_Y + \sigma_Y U)$. 进一步, 随机变量 $Z := X - \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}Y$ 与 Y 相互独立。

   (b) $\mathbb{E}[X|Y] = \mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y - \mu_Y)$.

8. 设 $W^1 = (W_t^1;\ t \geq 0)$ 和 $W^2 = (W_t^2;\ t \geq 0)$ 是同一概率空间下两个独立的布朗运动。对于任意 $t \geq 0$, 定义

$$W_t = \rho W_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} W_t^2, \qquad |\rho| < 1.$$

证明 $W = (W_t;\ t \geq 0)$ 也是一个布朗运动, 进一步计算 W_t 和 W_t^1 的协方差 $\mathrm{Cov}(W_t, W_t^1) =$?

9. 一个 n-维随机变量 X 服从高斯分布当且仅当对任意的 $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R}$, $(\sum_{i=1}^n a_{ji}X_i;\ j = 1, \ldots, m)$ 是一个服从 m-维高斯分布的随机变量。

10. 设 $B = (B_t;\ t \geq 0)$ 是一个布朗运动。对于 $\mu \in \mathbb{R}$ 及 $\sigma > 0$, 定义如下 (μ, σ^2)-布朗运动：

$$B_t^{\mu,\sigma} = \mu t + \sigma B_t, \qquad t \geq 0.$$

证明 (μ, σ^2)-布朗运动 $B^{\mu,\sigma} = (B_t^{\mu,\sigma};\ t \geq 0)$ 是一个高斯过程。

11. 设 $R(\omega)$ 和 $\Theta(\omega)$ 为两个独立的随机变量。随机变量 $R(\omega)$ 服从瑞利分布，即其概率密度函数为

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \mathbf{1}_{r>0}.$$

这里 $\sigma > 0$， 而随机变量 $\Theta \sim U(0, 2\pi)$. 定义随机过程：

$$X_t = R\cos(\Theta + \alpha t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}$. 证明 $X = (X_t;\ t \in \mathbb{R})$ 是一个高斯过程。

12. 证明布朗运动存在一个修正且该修正的样本轨道是局部 $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$-Hölder连续的。

13. 设 $\xi_i, i=1,2,\ldots$ 是一列独立同分布的且平方可积的随机变量列。设 $N=(N_t;\ t\geq 0)$ 是一个参数为 $\lambda>0$的 Poisson 过程且与 $(\xi_i;\ i=1,2,\ldots)$ 相互独立, 则复合 Poisson 过程定义为：

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i, \qquad t \geq 0.$$

这里我们记 $X_0=0$. 验证复合 Poisson 过程 $X=(X_t;\ t\geq 0)$ 是否具有平稳独立增量性，并计算其均值函数 $\mu(t)$ 和相关函数 $R(s,t)$。

14. 设 $X=(X_t;\ t\geq 0)$ 是一个连续轨道的可积随机过程。对于 $a,b>0$, 定义该过程的退出时:

$$\tau_{a,b}(\omega) := \inf\{t\geq 0;\ X_t(\omega)\notin(-a,b)\}.$$

这里记 $\inf\emptyset=+\infty$ 且 $X_0\in(-a,b)$. 证明：

(a) 随机过程 $(X_{t\wedge\tau_{a,b}};\ t\geq 0)$ 是一致可积的;

(b) 对于 $\alpha\in\mathbb{R}$, 定义过程 $M_t^\alpha := e^{\alpha X_t-\frac{1}{2}\alpha^2 t}$, $t\geq 0$. 随机过程 $(M_{t\wedge\tau_{a,b}}^\alpha;\ t\geq 0)$ 是一致可积的;

(c) 如果 (a) 成立，验证是否有如下极限 $\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X_{t\wedge\tau_{a,b}}]=\mathbb{E}[X_{\tau_{a,b}}]$？

5 第二章作业题

1. 设 $C=(C_n;\ n=1,2,\ldots)$ 是一个非负 $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_n;\ n=0,1,2,\ldots)$-可料过程. 证明：

(a) 如果 $X=(X_n;\ n=0,1,2,\ldots)$ 是一个 $\mathbb{F}$-鞅, 则鞅变换过程 $C\cdot X$ 是一个 $\mathbb{F}$-鞅;

(b) 如果 $X=(X_n;\ n=0,1,2,\ldots)$ 是一个 $\mathbb{F}$-上（下）鞅, 则鞅变换过程 $C\cdot X$ 是一个 $\mathbb{F}$-上（下）鞅.

2. 设 $X=(X_n;\ n=0,1,2,\ldots)$ 是其自然过滤 $\mathbb{F}^X$-鞅, 证明：对任意的可测函数 $f_n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $(n\geq 1)$, 有

$$\mathbb{E}\left[(X_{n+1}-X_n)f_{n+1}(X_0,X_1,\ldots,X_n)\right]=0, \quad n\geq 0.$$

取不同的可测函数 f_n, 你会得到有关随机变量列 $(X_n;\ n=0,1,2,\ldots)$ 不同的不等式。

3. 设 $X=(X_t;\ t\geq 0)$ 为平方可积独立增量过程且 $\mathbb{E}[X_t]=\mathbb{E}[X_0], \forall\ t\geq 0$. 证明：

(a) 对于 $t\geq 0$, 定义 $A_t=\mathbb{E}[X_t^2]-\mathbb{E}[X_0^2]$, 则 $t\to A_t$ 是单增的;

(b) $(X_t^2-A_t;\ t\geq 0)$ 为 $\mathbb{F}^X$-鞅.

4. 举两个满足上题条件的过程 X 并分别写出相应的结论 (a) 和 (b).

5. 设 $B=(B_t;\ t\geq 0)$ 是一个标准布朗运动. 对任意 $x\in\mathbb{R}$, 定义 $M_t(x)=e^{-xB_t-\frac{1}{2}x^2 t}$, $t\geq 0$. 回答以下问题：

(a) 对任意 $k=0,1,2,\ldots$, 是否 $(\frac{d^k}{dx^k}M_t(x);\ t\geq 0)$ 为 $\mathbb{F}^B$-鞅？

(b) 证明 $(W_t^2-t;\ t\geq 0)$ 和 $(W_t^3-3tW_t;\ t\geq 0)$ 为 $\mathbb{F}^B$-鞅.

6. 设 $X = (X_n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$ 为 $\mathbb{F}$-下鞅. 证明：对任意 $a < b$ 和 $N \in \mathbb{N}$, 有

$$\mathbb{E}\left[D_N([a,b];X)\right] \le \frac{b^-}{b-a} + \frac{\mathbb{E}[X_N^+]}{b-a}.$$

7. 设 $X = (X_n;\ n = 0, 1, \ldots)$ 是递减 σ-代数流 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n;\ n = 0, 1, \ldots)$-倒向下鞅 (backward sub-martingale). 回答如下问题：

(1) 证明该过程是一致 L^1-有界的 (即 $\sup_{n\ge0}\mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$) 当且仅当 $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n] > -\infty$.

(2) 证明 $Y = (X_n^+;\ n = 0, 1, \ldots)$ 也是递减 σ-代数流 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n;\ n = 0, 1, \ldots)$-倒向下鞅.

(3) 证明 $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$ 存在且有限 ($\mathbb{P}$-a.s.).

8. 设 $B = (B_t;\ t \ge 0)$ 是过滤概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t;\ t \ge 0), \mathbb{P})$ 下的一维标准布朗运动. 设 $a, b > 0$, 定义随机时 $\tau_{ab} = \inf\{t \ge 0;\ B_t \notin (-a, b)\}$ (记 $\inf\emptyset = +\infty$). 回答如下问题:

(1) 证明 τ_{ab} 为 $(\mathcal{F}_t;\ t \ge 0)$-停时以及停止过程 $(B_{t\wedge\tau_{ab}};\ t \ge 0)$ 是一致可积的.

(2) 对于 $\theta > 0$, 计算 $\mathbb{E}[e^{-\theta\tau_{ab}}]$ 以及 $\mathbb{E}[\tau_{ab}]$.

(3) 计算概率 $\mathbb{P}(B_{\tau_{ab}} = b)$.

9. 设 $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 而 $(\mathcal{F}_n;\ n \in \mathbb{N}) \subset \mathcal{F}$ 为一列单减 σ-代数. 定义 $\mathcal{F}_\infty = \cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$. 求证: 当 $n \to \infty$ 时,

(1) $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] \overset{a.s.}{\to} \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty]$.

(2) $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] \overset{L^1}{\to} \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty]$.

10. 设 τ 为 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t;\ t \ge 0)$-停时, 则 $\mathcal{F}_\tau$ 为一 σ-代数且 τ 为 $\mathcal{F}_\tau$-可测的.

11. 设 $(\tau_n;\ n \ge 1)$ 为一列 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t;\ t \ge 0)$-可选时, 则下列随机时均为 $\mathbb{F}$-可选时:

$$\sup_{n\ge1}\tau_n,\quad \inf_{n\ge1}\tau_n,\quad \liminf_{n\to\infty}\tau_n,\quad \limsup_{n\to\infty}\tau_n.$$

如果 $(\tau_n;\ n \ge 1)$ 为一列 $\mathbb{F}$-停时, 则 $\sup_{n\ge1}\tau_n$ 为 $\mathbb{F}$-停时.

12. 设 τ 为 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t;\ t \ge 0)$-停时, $X = (X_t;\ t \in I)$ 为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 下随机过程, 如果下面条件中的一个条件成立:

(1) I 是可数的且 X 为 $\mathbb{F}$-适应的;

(2) $I = \mathbb{R}_+$ 且 X 为循序可测的,

则 X_τ 为 $\mathcal{F}_\tau$-可测的.

13. 设 $(X_n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$ 为 $(\mathcal{F}_n;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$ 非负上鞅, 证明对任意的 $\lambda > 0$, 有

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\ge0} X_n \ge \lambda\right) \le \lambda^{-1}\mathbb{E}[X_0].$$

14. 设 $(X_t;\ t\geq 0)$ 为 $(\mathcal{F}_t;\ t\geq 0)$ 非负右连续上鞅, 证明对任意的 $\lambda>0$, 有

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0} X_n \geq \lambda\right) \leq \lambda^{-1}\mathbb{E}[X_0].$$

15. 设 $B=(B_t;\ t\geq 0)$ 为一标准布朗运动. 定义其最大值过程:

$$M_t := \sup_{s\in[0,t]} B_s, \qquad t\geq 0.$$

证明: 对任意的 $a>0$, 有

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln \mathbb{P}\left(\frac{M_t}{t}\geq a\right) \leq -\frac{a^2}{2}.$$

16. 设 $X=(X_t;\ t\geq 0)$ 是一个 $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t;\ t\geq 0)$-右连续鞅当且仅当 对任意有界 $\mathbb{F}$-停时 τ, X_τ 是可积的且 $\mathbb{E}[X_\tau]=\mathbb{E}[X_0]$.

17. 设 $X=(X_t;\ t\geq 0)$ 是一个 $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t;\ t\geq 0)$-右连续鞅, 则停止过程 $X^\tau=(X_{t\wedge\tau};\ t\geq 0)$ (其中 τ 为 $\mathbb{F}$-停时) 也为 $\mathbb{F}$-鞅.

18. 设 $\mathcal{M}_2$ 表示所有右连续平方可积鞅的全体以及 $\mathcal{M}_2^c$ 表示所有连续平方可积鞅的全体。定义空间 $\mathcal{M}_2$ 上的一个度量 d 使 $(\mathcal{M}_2,d)$ 为完备的，并证明 $\mathcal{M}_2^c$ 是 $\mathcal{M}_2$ 的一个完备子空间。

19. 设 $X=(X_t;\ t\geq 0)$ 为一轨道连续的 $\mathbb{R}^d$-值 $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t;\ t\geq 0)$-适应随机过程以及 $A\subset\mathbb{R}^d$ 为一闭集, 证明下面是一个 $\mathbb{F}$-停时：

$$\tau_A := \inf\{t\geq 0; X_t\in A\}.$$

6 第三章作业题

1. 设 $B=(B_t;\ t\geq 0)$ 是一标准布朗运动，用布朗运动的强 Markov 性证明布朗运动的反射原理，即证明下面的过程是一布朗运动：

$$W_t := \begin{cases} B_t, & t\leq \tau_b, \\ 2b-B_t, & t>\tau_b. \end{cases}$$

这里 $\tau_b := \inf\{t\geq 0;\ B_t=b\}$, $b>0$.

2. 证明如下的等式：对于 $t>0$ 以及 $b>0$,

$$\mathbb{P}(\tau_b\leq t) = 2\mathbb{P}(B_t>b).$$

3. 设 $B=(B_t;\ t\geq 0)$ 是一标准布朗运动，定义 $M_t=\sup_{s\in[0,t]} B_s$, $t\geq 0$, 为布朗运动的最大值过程。证明对任意 $b\geq c$ 和 $b>0$,

$$\mathbb{P}(M_t\geq b, B_t\leq c) = \mathbb{P}(B_t\geq 2b-c).$$

4. 用确定版的 Arzelá Ascoli 定理证明随机版的 Arzelá Ascoli 定理，即设 $(\mu_n;\ n\geq 1)$ 为一列 $(C(\mathbb{R}_+),\mathcal{B})$ 上的概率测度，则 $(\mu_n;\ n\geq 1)$ 为 (一致)胎紧的，当且仅当

(i) $\lim_{\lambda\uparrow+\infty}\sup_{n\geq 1}\mu_n(\{f\in C(\mathbb{R}_+);\ |f(0)|>\lambda\})=0$;

(ii) $\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{n\geq 1}\mu_n(\{f\in C(\mathbb{R}_+);\ m_T(f,\delta)>\eta\})=0,\ \forall\, T,\eta>0$.

其中 $m_T(f,\delta)$ 表示 $f\in C(\mathbb{R}_+)$ 的连续模。

5. 对于 $n\in\mathbb{N}$, 设 $X_n=(X_n(t);\ t\geq 0)$ 为轨道连续的随机过程并且满足如下条件：

(i) 对于某个 $\nu>0$, $\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}[|X_n(0)|^\nu]<+\infty$;

(ii) 对于某个 $\alpha,\beta,C_T>0$,

$$\sup_{n\geq 1}\mathbb{E}\left[|X_n(t)-X_n(s)|^\alpha\right]\leq C_T|t-s|^{1+\beta},\ \forall\, T>0,\ s,t\in[0,T].$$

证明 $(C(\mathbb{R}_+),\mathcal{B})$ 上的概率测度列 $(\mu_n:=\mathbb{P}(X_n)^{-1};\ n\geq 1)$ 为(一致)胎紧的。

6. 设 $\xi_i;\ i=1,\ldots,$ 为 i.i.d. 随机变量且 $\mathbb{E}[\xi_1]=0$ 和 $\mathbb{E}[\xi_1^2]=\sigma^2>0$. 随机游动 $S_k=\sum_{i=1}^k\xi_i$, $k\geq 1$ 以及 $S_0:=0$. 定义线性插值过程：

$$Y_t=S_{[t]}+(t-[t])\xi_{[t]+1},\qquad t\geq 0.$$

这里 $[t]$ 表示不大于 t 的最大正整数。再定义 $X_n(t):=\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}Y_{nt}$, $t\geq 0$. 证明：对任意 $0<t_1<t_2<\cdots<t_k<+\infty$, $k\in\mathbb{N}$, 有当 $n\to\infty$,

$$\pi_{t_1,\ldots,t_k}\circ X_n\xrightarrow{d}\pi_{t_1,\ldots,t_k}\circ B,$$

其中 $B=(B_t;\ t\geq 0)$ 是一标准布朗运动。